広島大学

2016年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とする．関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．

(3) c を正の定数とする．x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $y=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ において，x と y を入れかえて，

$$x=\frac{e^y-ae^{-y}}{2}$$

$$\therefore\ e^y-ae^{-y}-2x=0$$

両辺 e^y をかけて，$(e^y)^2-2xe^y-a=0$

$$\therefore\ e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4a}}{2}\qquad \therefore\ e^y=x\pm\sqrt{x^2+a}$$

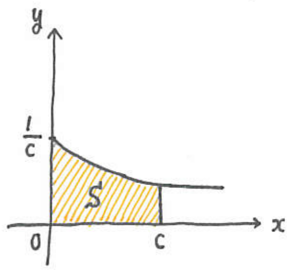
$e^y>0$, $a>0$ より，$e^y=x+\sqrt{x^2+a}$

$$\therefore\ y=\log(x+\sqrt{x^2+a})\qquad \therefore\ \underline{f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a})}\ //$$

(2)
$$\{f^{-1}(x)\}'=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\cdot\dfrac{2x}{2}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}\,(x+\sqrt{x^2+a})}$$

$$=\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}\ //$$



(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ は常に正で，$x\geqq 0$ において単調減少なので

右のようなグラフになる．

$$\therefore\ S=\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}\,dx$$

$$=\Big[\log(x+\sqrt{x^2+c^2})\Big]_0^c$$ ↙ (2) において $a=c^2$ を代入して

$$=\log\{c(1+\sqrt{2})\}-\log c$$

$$=\underline{\log(1+\sqrt{2})}\ //$$