



2017年理工学部第1問

増田

1 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x - 3 = 0$  を解け。  
 (2)  $x < 0$  の範囲において、次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。

$$y = |x| \sqrt{2-x^2}$$

- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  であることを用いて、次の極限値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^4} \{ \log(x^2 + x^3) - \log x^2 \}$$

(1)  $2^x = X (> 0)$  とおくと、方程式は

$$2X^2 + 5X - 3 = 0$$

となる。これを解くと

$$(2X-1)(X+3) = 0$$

$$X = -3, \frac{1}{2}$$

$X = 2^x > 0$  より  $-3$  は不適

$$2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$\therefore x = -1$$

(2)  $x < 0$  のとき、 $|x| = -x$

$$y = -x \sqrt{2-x^2}$$

ルートの中身は正だから

$$2-x^2 \geq 0$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

さらに  $x < 0$  より、 $-\sqrt{2} \leq x < 0$

$$y' = -\sqrt{2-x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$$

$-\sqrt{2} \leq x < 0$  の範囲内で増減表を書くと

$x$	$-\sqrt{2}$		$-1$		$0$
$y'$			$+$	$0$	$-$
$y$	$0$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$\swarrow$

$x = -1$  で極大値  $1$  をとる。

(3)  $\log(x^2 + x^3) - \log x^2 = \log(1+x)$   
 はすぐわかる。

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^4}$  が  $\frac{1}{x}$  になれば、与えられた

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  が使える。

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  を利用して変形しよう。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^4} \{ \log(x^2 + x^3) - \log x^2 \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x} \log(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^4} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x(1+\cos x)} \log(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4} \cdot \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} \log(1+x)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \frac{1}{2} \cdot \log e = \frac{1}{2}$$