2013年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ $\boxed{オ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$，$\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$ の解答は対応する解答群の中から最も適当なものを1つ選べ．

条件 $a_1=0$，$a_2=0$ と漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=2^n\log_2\frac{(n+1)^2}{n} \qquad \cdots\cdots(*)$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列の一般項を，以下の要領で求めてみよう．

(1) 漸化式$(*)$より，ベクトル $\overrightarrow{b_n}=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\overrightarrow{b_{n+1}}=A\overrightarrow{b_n}+\begin{pmatrix} 2^n\log_2\dfrac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立する．ただし，行列 A は $A=\begin{pmatrix} \boxed{ア} & \boxed{イウ} \\ \boxed{エ} & 0 \end{pmatrix}$ である．

この式の両辺に，A の逆行列 A^{-1} を左から n 回かけると

$$(A^{-1})^n\overrightarrow{b_{n+1}}=(A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n}+(A^{-1})^n\begin{pmatrix} 2^n\log_2\dfrac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$(A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n}$ の階差数列がわかる．これより，2以上の整数 n に対し，

$$(A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n}=\overrightarrow{b_1}+\sum_{k=1}^{\boxed{オ}}(A^{-1})^k\begin{pmatrix} 2^k\log_2\dfrac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(**)$$

を得る．

(2) $(**)$式の右辺第一項は $\overrightarrow{b_1}=\begin{pmatrix} \boxed{カ} \\ \boxed{キ} \end{pmatrix}$ であり，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \boxed{ク} & \boxed{ケ} \\ \boxed{コサ} & \boxed{シ} \end{pmatrix}$ は行列 $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて

$$A^{-1}=P\begin{pmatrix} \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}} & 0 \\ 0 & \boxed{ソ} \end{pmatrix}P^{-1}$$

と表されるので，$(**)$式右辺の和の項について，次式が成立する．

$$\sum_{k=1}^{\boxed{オ}}(A^{-1})^k\begin{pmatrix} 2^k\log_2\dfrac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \log_2\boxed{タ} \\ -2^n\log_2\boxed{チ} \end{pmatrix}$$

(3) (2) の結果と，行列 A が同じ P を用いて

$$A=P\begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix}P^{-1}$$

と表わされることに注意すると，(**) 式の両辺に行列 A を左から $(n-1)$ 回かけて得られる $\overrightarrow{b_n}$ から，一般項 a_n は

$$a_n=2^{\boxed{\text{ト}}}\log_2\boxed{\text{ナ}}$$

$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ となる．

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $1-n$

⑤ $-n$　⑥ $-n-1$　⑦ $\dfrac{n(n+1)}{2}$　⑧ n^2-1

⑨ $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

① $n-1$　② n　③ $\dfrac{n+1}{n}$　④ $\dfrac{4n-6}{n}$

⑤ n^2-4n+5　⑥ $(n-1)!$　⑦ $n!$　⑧ $n!-1$

⑨ $(n-1)\times n!$　⓪ $n\times n!$