

2016年文系F日程第3問

3 次の間に答えよ。

(1) 円柱の体積を  $V$ 、表面積を  $S$ 、高さを  $h$ 、底面の半径を  $r$  とするとき、以下の間に答えよ。(i)  $V$  を  $h$  と  $r$  で表せ。(ii)  $S$  を  $h$  と  $r$  で表せ。(iii)  $S$  が一定であるとき、 $V$  の最大値を求めよ。また  $V$  が最大となるときの  $r$  と  $h$  を求めよ。(2)  $n$  が整数のとき、 $n(n+2)(5n+2)$  は 3 の倍数であることを証明せよ。

(1) (i)  $V = \pi r^2 \cdot h \quad \therefore \underline{V = \pi h r^2}$  //

(ii)  $S = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \quad \therefore \underline{S = 2\pi h r + 2\pi r^2}$  //

(iii) (ii) より、 $h = \frac{S}{2\pi r} - r$

(i) に代入して、 $V = \pi \left( \frac{S}{2\pi r} - r \right) r^2$   
 $= \frac{1}{2} r S - \pi r^3$

$V > 0$  より、 $r \left( \frac{1}{2} S - \pi r^2 \right) > 0$   
 $\therefore 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

$\therefore V' = \frac{1}{2} S - 3\pi r^2$   
 $= -3\pi \left( r^2 - \frac{S}{6\pi} \right)$

$r$	(0)	...	$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$	...	$\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$
$V'$		+	0	-	
$V$		↗		↘	

$r > 0$  より  $V' = 0$  とおくと、 $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$  のとき、このとき  $h = \frac{S}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{S}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6S}{\pi}}$

$V$  の最大値は  $\underline{\frac{S}{18} \sqrt{\frac{6S}{\pi}}}$  ( $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ ,  $h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6S}{\pi}}$  のとき) //

(2) (i)  $n = 3k$  ( $k$ : 整数) のとき、

$n(n+2)(5n+2) = 3k(3k+2)(15k+2) \quad \therefore$  これは 3 の倍数

(ii)  $n = 3k+1$  ( $k$ : 整数) のとき、

$n(n+2)(5n+2) = (3k+1) \cdot 3(k+1) \cdot (15k+7) \quad \therefore$  これは 3 の倍数

(iii)  $n = 3k+2$  ( $k$ : 整数) のとき

$n(n+2)(5n+2) = (3k+2)(3k+4) \cdot 3(5k+4) \quad \therefore$  これは 3 の倍数

(i) ~ (iii) より、 $n$  が整数のとき、 $n(n+2)(5n+2)$  は 3 の倍数である  $\square$