

2017年工学部（中期）第3問

3 この問題は最短ネットワーク問題と呼ばれるものである。次の問いに答えなさい。

- (1) 図2のように長方形ABCD ($AB = 2a$, $AD = b$)において、点Aから出発し、辺CD上の1点P ($DP = x$)を經由して、点Bに至るとき、経路長 $AP + PB$ が最小となるのは、点PがCDの中点 ($x = a$) に位置するときであることを微分を利用して証明しなさい。
- (2) 図3のように長方形の頂点に位置する4つの町A, B, C, D ($AB = 2a$, $AD = 2b$ ($b \geq a$)) を結ぶ最短の道路網を作りたい。この問題を考えるとき、(1)の結果をふまえて対称性（上下、左右が対称である）を考慮すると、図3のように接続点E, Fをつくり道路を作ることが考えられる（点GはABの中点、点HはCDの中点、G, E, F, Hは同一直線上にある）。このときABとAEのなす角を θ として全道路長 $f(\theta) = AE + BE + EF + FD + FC$ を求めなさい。さらに $f(\theta)$ を最小とする θ を求めなさい。