宮城教育大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = a_2 = -1,$$
$$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + na_n = (n^2+n+1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，

$$a_{n+1} - na_n = (n-1)(n+1)! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{(n-1)!}$ とおくとき，(1) を用いて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) n に関する数学的帰納法．

(i) $n=1$ のとき．$a_2 - 1\cdot a_1 = 0$ となり．$a_1 = a_2 = -1$ より成り立っている．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．

$$a_{k+1} - ka_k = (k-1)(k+1)! \cdots (*)$$

$$a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} = a_{k+1} - k\cdot a_k + (k^2+k+1)(k+1)!$$

$\{a_n\}$ の漸化式より，

$$= (k-1)(k+1)! + (k^2+k+1)(k+1)! \quad (\because (*)より)$$

$$= (k^2+2k)(k+1)!$$

$$= k\cdot(k+2)! \quad \therefore n=k+1 のとき成り立つ$$

(i)，(ii) より．$n=1,2,3,\cdots$ に対して．与式が成り立つ $\blacksquare$

(2) (1) の与式を両辺 $n!$ で割って．

$$\frac{a_{n+1}}{n!} - \frac{a_n}{(n-1)!} = n^2-1 \qquad \therefore b_{n+1} - b_n = n^2 - 1$$

$n \geqq 2$ のとき．

$$\therefore b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \qquad b_1 = \frac{a_1}{0!} = -1 \text{ より．} \quad b_n = -1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$$ ← これは $n=1$ のときも成り立っている．

(3) $$a_n = (n-1)!\cdot b_n = \frac{(n+1)!(2n-5)}{6}$$