

2015年 商学部 第2問

2 曲線  $T: y = x^3 + 6x^2$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $(2, a)$  を通る曲線  $T$  への接線の本数  $L$  を求めよ。ただし  $a > 0$  とする。  
 (2) この  $L$  が 2 本のとき、接点の  $x$  座標が小さい方の接線と、曲線  $T$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)  $y' = 3x^2 + 12x$  より、接点を  $(t, t^3 + 6t^2)$  とおくと、接線は、

$$y = (3t^2 + 12t)(x - t) + t^3 + 6t^2$$

$$\therefore y = 3(t^2 + 4t)x - 2t^3 - 6t^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

これが  $(2, a)$  を通るので、

$$a = 6t(t + 4) - 2t^3 - 6t^2$$

$$\therefore -2t^3 + 24t = a \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(t) = -2t^3 + 24t \text{ とおくと、}$$

$$f'(t) = -6t^2 + 24$$

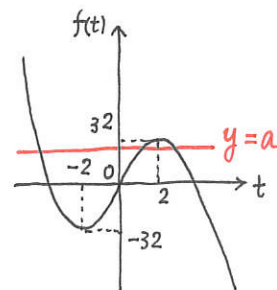
$$= -6(t + 2)(t - 2)$$

よって、グラフは右のようになり

$y = a (> 0)$  との交点の個数が  $L$  であるから、

$$L = \begin{cases} 1 & (a > 32 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = 32 \text{ のとき}) \\ 3 & (0 < a < 32 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{---} //$$

$t$	...	-2	...	2	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↓	-32	↑	32	↓



(2) (1) より、 $a = 32$

$$\text{このとき } \textcircled{2} \text{ より、 } t^3 - 12t + 16 = 0 \quad \therefore (t - 2)^2(t + 4) = 0$$

$\therefore$  接点の  $x$  座標が小さい方は  $(-4, 32)$

$\therefore$  ① より、その接線は、 $y = 32$

$\therefore$  右のグラフより

$$S = \int_{-4}^2 32 - (x^3 + 6x^2) dx = 64 - 4 - 16 - (-128 - 64 + 128) = 108 //$$

