0001495814058999

東北学院大学

2013年 文系 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 8n + 4\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ．

(1) $a_{n+1} - a_n = 8n + 4$ より．

階差数列を $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 8k + 4$$

$$= 3 + 8 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot n + 4(n-1)$$

$$= \underline{4n^2 - 1}\ //$$

書くこと．

これは $n=1$ のときも成り立つ

(2) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$$

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \underline{\frac{n}{2n+1}}\ //$$