東京女子大学

2016年 現代教養 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 2次方程式 $(\log_4 a - 1)x^2 + (\log_2 a - 2)x + \log_4 \frac{1}{a} = 0$ について，以下の設問に答えよ．

(1) この方程式が異なる2つの実数解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) この方程式が異なる2つの負の解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) $\log_4 a - 1 = 0$ すなわち $a = 4$ のときは 2次方程式とならず不適

$\therefore$ $a \neq 4$ とする．また真数条件より，$a > 0$ $\therefore$ $a > 0,\ a \neq 4$ …(*)

判別式を D とすると，

$$D = (\log_2 a - 2)^2 - 4(\log_4 a - 1)\cdot \log_4 \frac{1}{a}$$

$$= (\log_2 a)^2 - 4\log_2 a + 4 - 4\left(\frac{\log_2 a}{2} - 1\right)\cdot\left(-\frac{\log_2 a}{2}\right)$$ ← 底の変換公式を使った

$$= (\log_2 a)^2 - 4\log_2 a + 4 + (\log_2 a)^2 - 2\log_2 a$$

$$= 2\{(\log_2 a)^2 - 3\log_2 a + 2\}$$

$$= 2(\log_2 a - 1)(\log_2 a - 2)$$

$D > 0$ であるから，$\log_2 a < 1,\ 2 < \log_2 a$

$\therefore$ $a < 2,\ 4 < a$

(*)とあわせて，$0 < a < 2,\ 4 < a$

(2) (1)で求めた範囲において，解と係数の関係より，

$$-\frac{\log_2 a - 2}{\log_4 a - 1} < 0 \ \cdots ① \quad かつ \quad \frac{\log_4 \frac{1}{a}}{\log_4 a - 1} > 0 \ \cdots ②$$

(i) $0 < a < 2$ のとき，$\log_4 a < 1$ なので

① $\iff \log_2 a - 2 < 0$ $\iff a < 4$

② $\iff \log_4 \frac{1}{a} < 0$ $\iff a > 1$

よって，$1 < a < 2$

(ii) $a > 4$ のとき，$\log_4 a > 1$ なので，

① $\iff \log_2 a - 2 > 0$ $\iff a > 4$

② $\iff \log_4 \frac{1}{a} > 0$ $\iff a < 1$

よって，同時に成り立つ a は存在しない

(i)，(ii)より，$\underline{1 < a < 2}$ //