東京女子大学

2016年 現代教養 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標空間において N(0, 0, 1), P(a, b, 0) とする．原点を中心とする半径1の球面と直線NPとのN以外の交点をQ(x, y, z) とする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP}$ をみたす実数 t を a, b で表せ．

(2) x, y, z を，それぞれ a, b で表せ．

(3) a, b を，それぞれ x, y, z で表せ．

(1) $\overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP}$ より．$(x, y, z-1) = (ta, tb, -t)$

$\therefore x = ta,\ y = tb,\ z = 1-t \quad \cdots (*)$

点Qは球面上の点より．$x^2+y^2+z^2=1$

$\therefore (ta)^2+(tb)^2+(1-t)^2=1$

$\therefore t\{t(a^2+b^2+1)-2\}=0$

$N \neq Q$ より．$\overrightarrow{NQ} \neq \vec{0}$ $\therefore t \neq 0$

よって．$\underline{t = \dfrac{2}{a^2+b^2+1}}$ //

(2) (1)の結果を(*)に代入して，$\underline{x = \dfrac{2a}{a^2+b^2+1},\ y = \dfrac{2b}{a^2+b^2+1},\ z = \dfrac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}}$ //

(3) $z = 1 - \dfrac{2}{a^2+b^2+1}$，$a^2+b^2+1 = \dfrac{2a}{x}$ ($x \neq 0$ のとき，すなわち $a \neq 0$ のとき)

$\therefore$ $a \neq 0$ のとき．$z = 1 - \dfrac{2x}{2a}$ $\therefore z = 1 - \dfrac{x}{a}$ $\therefore a = \dfrac{x}{1-z}$ ($\because z \neq 1$)

同様にすると．$b = \dfrac{y}{1-z}$

以上より．$\underline{a = \dfrac{x}{1-z},\ b = \dfrac{y}{1-z}}$ //