山口大学

2016年 工・理・教育 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ nを自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a>0$，$n \geqq 3$のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(1+a)^n > \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}_{={}_nC_3}a^3$$

(2) $r>1$のとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい．

(1) 二項定理より，$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot a^k$

$$\therefore (1+a)^n = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{na}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}\cdot a^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{k=3\text{のとき}} + (\text{その他の正の項})$$

$a>0$，$n \geqq 3$ であるから，$(1+a)^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つ ▨

(2) $a=r-1\ (>0)$ とおくと (1) より

$$r^n > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(r-1)^3$$

よって，

$$0 < \frac{n^2}{r^n} < \frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(r-1)^3} = 0$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n} = 0$$

//