2016年 文系 第2問

$\boxed{2}$ aを正の定数とし，$f(x)=|x^2+2ax+a|$とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ．

(2) $y=f(x)$のグラフが点$(-1,\ 2)$を通るときのaの値を求めよ．また，そのときの$y=f(x)$のグラフとx軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a=2$とする．すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bの取りうる値の範囲を求めよ．

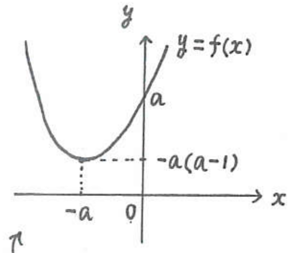
(1) $x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$

$\qquad\qquad = (x+a)^2-a(a-1)$

(i) $0<a<1$ のとき $-a(a-1)>0$ であるから，

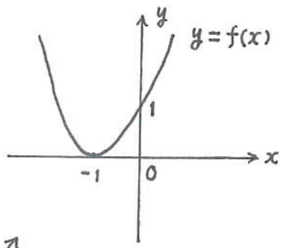
すべての実数xについて，$x^2+2ax+a>0$

$\therefore f(x)=(x+a)^2-a(a-1)$



(i) $0<a<1$ のとき

(ii) $a=1$ のとき $f(x)=|(x+1)^2|=(x+1)^2$



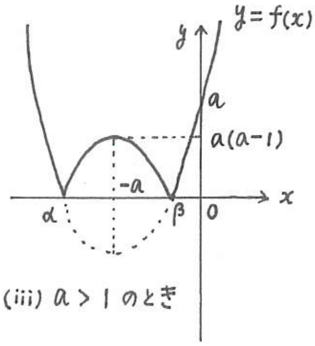
(ii) $a=1$ のとき

(iii) $a>1$ のとき $x^2+2ax+a=0$ の2つの解を

$\alpha=-a-\sqrt{a(a-1)}$ ，$\beta=-a+\sqrt{a(a-1)}$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+a & (x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2+2ax+a) & (\alpha<x<\beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i)〜(iii) よりグラフは右のようになる．



(iii) $a>1$ のとき

(2) $2=|1-2a+a|$ より，$|1-a|=2$

$\therefore a=-1,\ 3$ $\quad a>0$ なので，$\underline{a=3}$ //

グラフは (1)の(iii) のようになり，

$\alpha=-3-\sqrt{6}$ ，$\beta=-3+\sqrt{6}$

$\frac{1}{6}$公式

$$\therefore S=\int_\alpha^\beta -x^2-6x-3\,dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\underline{8\sqrt{6}}\ //$$

(3) $g(x)=f(x)-2x$ とおくと，$f(x)\geqq 2x+b \iff g(x)\geqq b$

$$g(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & (x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x) \leftarrow (x+1)^2+1 \\ -x^2-6x-2 & (\alpha<x<\beta) \leftarrow -(x+3)^2+7 \end{cases}$$

ここで，$\alpha=-2-\sqrt{2}$ ，$\beta=-2+\sqrt{2}$ ，$g(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha=-2\alpha$

$g(\beta)=f(\beta)-2\beta=-2\beta$ よって，右のグラフと $y=b$ のグラフより

$b\leqq -2\beta$ すなわち，$\underline{b\leqq 4-2\sqrt{2}}$ //