

2014年 第4問

1 枚 目 / 2 枚

4 1次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は以下の2つの条件を満たすとする。

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \int_1^x 6t f_n(t) dt$ を $x^2 + x$ で割ったときの余りに等しい。

以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 1$ のとき, a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
 (2) $n \geq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ。
 (3) $n \geq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は3の倍数ではないことを示せ。

$$\begin{aligned}
 (1) (ii) \text{より. } P_n(x) &= \int_1^x 6t(a_n t + b_n) dt \\
 &= \int_1^x 6a_n t^2 + 6t b_n dt \\
 &= [2a_n t^3 + 3b_n t^2]_1^x \\
 &= 2a_n x^3 + 3b_n x^2 - 2a_n - 3b_n
 \end{aligned}$$

∴右の割り算より。

$$f_{n+1}(x) = (2a_n - 3b_n)x - 2a_n - 3b_n$$

$$\therefore \underline{a_{n+1} = 2a_n - 3b_n, b_{n+1} = -2a_n - 3b_n} \quad //$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} 2a_n x + (3b_n - 2a_n) \\ x^2 + x \overline{) 2a_n x^3 + 3b_n x^2 - 2a_n - 3b_n} \\ \underline{2a_n x^3 + 2a_n x^2} \\ (3b_n - 2a_n)x^2 - 2a_n - 3b_n \\ \underline{(3b_n - 2a_n)x^2 + (3b_n - 2a_n)x} \\ (2a_n - 3b_n)x - 2a_n - 3b_n \end{array}
 \end{array}$$

(2) 数学的帰納法を示す。

(A) $n = 2$ のとき. (1)の漸化式より. $a_2 = 2a_1 - 3b_1, b_2 = -2a_1 - 3b_1$

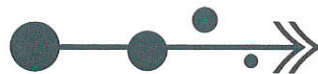
$a_1 = 1, b_1 = 0$ なので, $a_2 = 2, b_2 = -2$

∴ $|a_2| = |b_2| = 2$ となり. とともに偶数となり成り立つ(B) $n = k$ のとき. 成り立つと仮定すると. $|a_k|$ と $|b_k|$ はともに偶数.

$a_{k+1} = 2a_k - 3b_k$ より. $|a_{k+1}|$ は偶数.

$b_{k+1} = -2a_k - 3b_k$ より. $|b_{k+1}|$ は偶数.

∴ $n = k + 1$ のとき成り立つ(A), (B) より. $n \geq 2$ のとき. $|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数 \square



2014年 第4問

2枚目 / 2枚

数理
石井K

4 1次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は以下の2つの条件を満たすとする.

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \int_1^x 6t f_n(t) dt$ を $x^2 + x$ で割ったときの余りに等しい.

以下の問いに答えよ.

- (1) $n \geq 1$ のとき, a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ.
- (3) $n \geq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は3の倍数ではないことを示せ.

(3) (1) の2つの漸化式を $n=1$ で

$$a_{n+1} + b_{n+1} = -6b_n$$

$\therefore |a_{n+1}|$ と $|b_{n+1}|$ の一方が3の倍数であれば他方も3の倍数となる.

$\therefore |a_{n+1}|$ と $|b_{n+1}|$ がともに3の倍数であると仮定する. このとき

$$a_{n+1} = 2a_n - 3b_n \text{ より. } 2a_n = a_{n+1} + 3b_n \text{ より. } a_n \text{ も3の倍数.}$$

$\therefore b_n$ も3の倍数. これをくり返すと. 帰納的に.

$$|a_2|, |b_2| \text{ はともに3の倍数となるか}$$

これは, $|a_2| = |b_2| = 2$ に矛盾する.

$\therefore n \geq 2$ のとき, $|a_n|, |b_n|$ はともに3の倍数ではない \square