熊本大学

2014年 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 1次関数 $f_n(x)=a_nx+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は以下の2つの条件を満たすとする．

(i) $f_1(x)=x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x)=\displaystyle\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を x^2+x で割ったときの余りに等しい．

以下の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は3の倍数ではないことを示せ．

(1) (ii) より．$P_n(x)=\int_1^x 6t(a_nt+b_n)\,dt$

$=\int_1^x 6a_nt^2+6tb_n\,dt$

$=\left[2a_nt^3+3b_nt^2\right]_1^x$

$=2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n$

∴右の割り算より．

$$
\begin{array}{r}
2a_nx+(3b_n-2a_n) \\
x^2+x\ \big)\ \overline{2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n} \\
\underline{2a_nx^3+2a_nx^2} \\
(3b_n-2a_n)x^2-2a_n-3b_n \\
\underline{(3b_n-2a_n)x^2+(3b_n-2a_n)x} \\
(2a_n-3b_n)x-2a_n \\
-3b_n
\end{array}
$$

$f_{n+1}(x)=(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$

∴ $\underline{a_{n+1}=2a_n-3b_n,\ b_{n+1}=-2a_n-3b_n}$ //

(2) 数学的帰納法で示す．

(A) $n=2$ のとき．(1)の漸化式より．$a_2=2a_1-3b_1$，$b_2=-2a_1-3b_1$

$a_1=1$，$b_1=0$ なので，$a_2=2$．$b_2=-2$

∴ $|a_2|=|b_2|=2$ となり．ともに偶数となり成り立つ

(B) $n=k$ のとき．成り立つと仮定すると．$|a_k|$ と $|b_k|$ はともに偶数．

$a_{k+1}=2a_k-3b_k$ より．$|a_{k+1}|$ は偶数．

$b_{k+1}=-2a_k-3b_k$ より．$|b_{k+1}|$ は偶数．

∴ $n=k+1$ のとき成り立つ

(A)．(B) より．$n\geqq 2$ のとき．$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数 ▨

熊本大学

2014年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 1次関数 $f_n(x)=a_nx+b_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) は以下の2つの条件を満たすとする．

(i) $f_1(x)=x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x)=\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を x^2+x で割ったときの余りに等しい．

以下の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は3の倍数ではないことを示せ．

(3) (1)の2つの漸化式をたして．

$a_{n+1}+b_{n+1}=-6b_n$

∴ $|a_{n+1}|$ と $|b_{n+1}|$ の一方が3の倍数であれば他方も3の倍数となる．

∴ $|a_{n+1}|$ と $|b_{n+1}|$ がともに3の倍数であると仮定する．このとき．

$a_{n+1}=2a_n-3b_n$ より．$2a_n=a_{n+1}+3b_n$ より．a_n も3の倍数．

∴ b_n も3の倍数．これをくり返すと．帰納的に．

$|a_2|$，$|b_2|$ はともに3の倍数となるが

これは．$|a_2|=|b_2|=2$ に矛盾する．

∴ $n\geqq 2$ のとき．$|a_n|$，$|b_n|$ はともに3の倍数ではない ▨