0002267542377999

大分大学

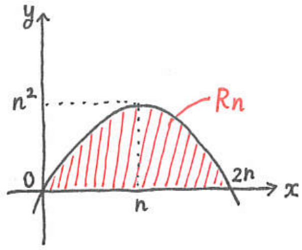
2016年 医学部 第2問

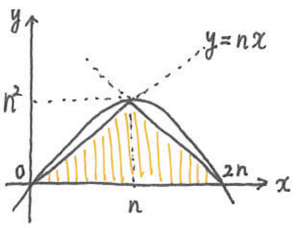
$\boxed{2}$ 自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域（境界線を含む）R_n を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 R_n に含まれる格子点（x 座標と y 座標がともに整数である点）の数 S_n を求めなさい．

(2) 点 A(0, 0)，B($2n$, 0)，および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域（境界線を含む）に含まれる格子点の数 T_n を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めなさい．





(1) R_n に含まれる格子点で x 座標が k（k は $0\leqq k\leqq 2n$ をみたす整数）のものは，

$(k,0),(k,1),\cdots(k,2nk-k^2)$ の $2nk-k^2+1$ 個であるから，

$$S_n=\sum_{k=0}^{2n}(2nk-k^2+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{2n}(2nk-k^2+1)$$

$$=1+2n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)-\frac{1}{6}\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)+2n$$

$$=\underline{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1}\ /\!/$$

(2) $x=n$ に関して対称なので

$$T_n=\left(\sum_{k=0}^{n-1}(nk+1)\right)\times 2+\underbrace{n^2+1}_{x=n\text{上の格子点}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(n(k-1)+1\right)+n^2+1$$

$$=2\left\{n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(1-n)\cdot n\right\}+n^2+1$$

$$=\underline{n^3+2n+1}\ /\!/$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{3n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

$$=\underline{\frac{3}{4}}\ /\!/$$