2016年 教育・経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 2次関数 $f(x)$ に対して，関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

と定める．方程式 $F(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもつとする．これらの解のうち，最大の解と最小の解の絶対値は一致する．このとき，2次方程式 $f(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもつことを示しなさい．

$f(x)$ は2次関数より，$F(x)$ は3次関数である

$F(0) = 0$ より，方程式 $F(x) = 0$ の解の1つは $x = 0$ である

他の2つの解は $x = \alpha, -\alpha$ $(\alpha > 0)$ と表せることから

$F(x) = ax(x-\alpha)(x+\alpha)$ と表せる（a は定数）

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ の両辺を x で微分して，

$F'(x) = f(x)$ となるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \{ax(x-\alpha)(x+\alpha)\}' \\ &= (ax^3 - a\alpha^2 x)' \\ &= 3ax^2 - a\alpha^2 \\ &= a(3x^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

∴ 方程式 $f(x) = 0$ は2つの実数解

$$x = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

をもち，$\alpha > 0$ よりこれらは異なる ▨