2012年 海洋工 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

2 x の整式 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$\begin{cases} f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x, \\ f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

で定める．

(1) 方程式 $f_5(x)=0$ を解け．
(2) $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を示せ．
(3) $\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ．

(1) $f_2(x)=2x\cdot f_1(x)-f_0(x)=2x^2-1$

$f_3(x)=2x\cdot f_2(x)-f_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$

$f_4(x)=2x\cdot f_3(x)-f_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$

$f_5(x)=2x\cdot f_4(x)-f_3(x)=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)=16x^5-20x^3+5x$

$\therefore$ $f_5(x)=0$ より．$x(16x^4-20x^2+5)=0$

$\therefore$ $x=0$，$x^2=\dfrac{20\pm\sqrt{400-4\cdot16\cdot5}}{32}$ $\iff$ $\underline{x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}}$ //

(2) 数学的帰納法で示す　← $n=2,3,4,5$ だけなので，1つずつ証明してもよい．

(i) $n=2$ のとき．

$f_2(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$　$\therefore$ 成り立つ

(ii) $n=k$ 以下で成り立つと仮定すると．

$f_k(\cos\theta)=\cos k\theta$

このとき，$f_{k+1}(\cos\theta)=2\cos\theta\, f_k(\cos\theta)-f_{k-1}(\cos\theta)$

$=2\cos k\theta\cos\theta-\cos(k-1)\theta$

$=2\{\cos(k-1)\theta\cdot\cos\theta-\sin(k-1)\theta\sin\theta\}\cos\theta-\cos(k-1)\theta$

$=\cos(k-1)\theta\cdot(2\cos^2\theta-1)-\sin(k-1)\theta\cdot\sin2\theta$

$=\cos(k-1)\theta\cos2\theta-\sin(k-1)\sin2\theta$

$=\cos(k+1)\theta$

$\therefore$ $n=k+1$ のとき成り立つ．

(i)，(ii) より．$n=2,3,4,5$ で $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つ ▨

東京海洋大学

2012年 海洋工 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ x の整式 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$\begin{cases} f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x, \\ f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

で定める．

(1) 方程式 $f_5(x)=0$ を解け．

(2) $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を示せ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ．

(3) (2) より．$f_5(\cos\theta)=\cos 5\theta$

これに $\theta=\dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{3\pi}{10},\ \dfrac{7\pi}{10},\ \dfrac{9\pi}{10}$ を代入して

$f_5\left(\cos\dfrac{\pi}{10}\right)=f_5\left(\cos\dfrac{3\pi}{10}\right)=f_5\left(\cos\dfrac{7\pi}{10}\right)=f_5\left(\cos\dfrac{9\pi}{10}\right)=0$

よって (1) より，$\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ は $f_5(x)=0$ の解で

いずれも0ではなく，$\cos\dfrac{9\pi}{10}<\cos\dfrac{7\pi}{10}<\cos\dfrac{3\pi}{10}<\cos\dfrac{\pi}{10}$ より．

$\cos\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}=-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}=-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ //