東京海洋大学

2012年 海洋工 第3問

$\boxed{3}$ 定数 a $(a \fallingdotseq 1)$ に対し，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ とする．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．
ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C$（$C$ は積分定数）を用いてよい．

(1) $f(1)=0$ より $f(x)$ は $x-1$ で割り切れる

右の割り算より $f(x)=(x-1)\{x^2-(a+1)x+a\}$

$=(x-1)^2(x-a)$

$\therefore$ $f(x)=0$ の解は，$x=1$（重解），a //

$$
\begin{array}{r}
x^2-(a+1)x+a \\
x-1\,\big)\,\overline{x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a} \\
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
-(a+1)x^2+(2a+1)x\qquad \\
\underline{-(a+1)x^2+(a+1)x\qquad} \\
ax-a \\
\underline{ax-a} \\
0
\end{array}
$$

(2) $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+2a+1$

$=(x-1)\{3x-(2a+1)\}$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=1$，$\dfrac{2a+1}{3}$

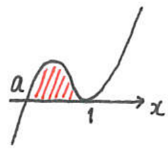
右の増減表と，

$f\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)=\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)^3-(a+2)\cdot\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)^2+(2a+1)\cdot\dfrac{2a+1}{3}-a$

$=-\dfrac{4}{27}(a-1)^3$

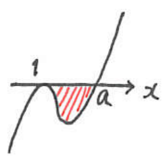
より，$\begin{cases} a<1 \text{ のとき，極大値 } -\dfrac{4}{27}(a-1)^3,\ \text{極小値 } 0 \\ a>1 \text{ のとき 極大値 } 0,\ \text{極小値 } -\dfrac{4}{27}(a-1)^3 \end{cases}$ //

x	$\cdots$	$\frac{2a+1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$



(i) $a<1$ のとき．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{2a+1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$



(ii) $a>1$ のとき．

(3) $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx=\int_1^a -f(x)\,dx$ より，$a>1$，$a<1$ のいずれの場合も

$S=\displaystyle\int_a^1 x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a\ dx$

$=\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{a+2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax\right]_a^1$

$=\dfrac{1}{12}a^4-\dfrac{1}{3}a^3+\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{12}$

$=\dfrac{1}{12}(a-1)^4$ //