2012年 海洋科学 第5問

$\boxed{5}$ 空間内に三角形ABCと定点Oを中心とする半径1の球面Sとがある．点PがS上のすべての点を動くときの$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$の最大値，最小値をそれぞれ$M$，$m$とするとき，次の問に答えよ．ただし，三角形ABCの重心GはOG >1をみたすものとする．

(1) $M=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{BQ}^2+\mathrm{CQ}^2$となる$S$上の点をQ，$m=\mathrm{AR}^2+\mathrm{BR}^2+\mathrm{CR}^2$となる$S$上の点をRとするとき，3点Q，R，Gは1直線上にあることを示せ．

(2) $\sqrt{M-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}-\sqrt{m-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}$の値は三角形ABCに無関係に定まることを示し，その値を求めよ．