東京海洋大学

2015年 海洋科学 第4問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

4 座標平面上の曲線 $y = x^2(1-x)$ を C とし，直線 $y = -x$ を ℓ とする．数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める．$a_1 = \dfrac{2}{5}$ とし，$x = a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ における C の接線と ℓ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき次の問に答えよ．

(1) n を自然数とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) n を自然数とするとき，$0 < a_{n+1} < a_n{}^2$ を示せ．

(1) $y' = 2x - 3x^2$

$\therefore$ $x = a_n$ における C の接線は，

$$y = (2a_n - 3a_n^2)(x - a_n) + a_n^2(1 - a_n)$$

$$= (2a_n - 3a_n^2)x - a_n^2 + 2a_n^3$$

$$\therefore\ -a_{n+1} = (2a_n - 3a_n^2)a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n^3$$

$$\therefore\ (3a_n^2 - 2a_n - 1)a_{n+1} = a_n^2(2a_n - 1)$$

$$\therefore\ (3a_n + 1)(a_n - 1)a_{n+1} = a_n^2(2a_n - 1) \quad \cdots ①$$

$a_n = -\dfrac{1}{3}$ と仮定すると，①の(左辺)$=0$，(右辺)$\neq 0$　$\therefore$ 矛盾　$\therefore\ 3a_n + 1 \neq 0$

同様にして，$a_n - 1 \neq 0$

$\therefore$ ①の両辺を $(3a_n+1)(a_n-1)$ $(\neq 0)$ で割って，$\underline{a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(2a_n-1)}{(3a_n+1)(a_n-1)}}$ //

(2) (1)より，$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(1-2a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$

まず，$0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を数学的帰納法で示す　← この方針を作るのが難しい！

(i) $n=1$ のとき，

$a_1 = \dfrac{2}{5}$ より，$0 < a_1 < \dfrac{1}{2}$　$\therefore$ 成り立つ

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると，

$0 < a_k < \dfrac{1}{2}$

よって，$0 < a_k{}^2 < \dfrac{1}{4}$，$0 < 1 - 2a_k < 1$，$1 < 3a_k + 1 < \dfrac{5}{2}$，$\dfrac{1}{2} < 1 - a_k < 1$

以上より，$\dfrac{0 \cdot 0}{\frac{5}{2} \cdot 1} < a_{k+1} < \dfrac{\frac{1}{4} \cdot 1}{1 \cdot \frac{1}{2}}$　　$\therefore\ 0 < a_{k+1} < \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $n = k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii)より，$0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つ

2枚目へつづく

2015年 海洋科学 第4問　2枚目／2枚

数理石井K

4 座標平面上の曲線 $y = x^2(1-x)$ を C とし，直線 $y = -x$ を ℓ とする．数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定める．$a_1 = \dfrac{2}{5}$ とし，$x = a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ における C の接線と ℓ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき次の問に答えよ．

(1) n を自然数とするとき，a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) n を自然数とするとき，$0 < a_{n+1} < a_n{}^2$ を示せ．

(2) のつづき

あとは，$a_n^2 - a_{n+1} > 0$ を示せばよい

$$a_n^2 - a_{n+1} = a_n^2 - \frac{a_n^2(1-2a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$$

$$= \frac{a_n^3(4-3a_n)}{(3a_n+1)(1-a_n)}$$

ここで，$0 < a_n < \frac{1}{2}$ より，$a_n^3 > 0$，$4 - 3a_n > 0$，$3a_n + 1 > 0$，$1 - a_n > 0$

$\therefore\ a_n^2 - a_{n+1} > 0$

以上より，$0 < a_{n+1} < a_n^2$ ▨