0002183186187999

東京海洋大学

2016年 海洋工 第1問

1枚目／2枚

K.M.
解答作成者

数理
石井K
CHECK

1 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を以下で定める．

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，

$$a_n + \sqrt{3}b_n = (2+\sqrt{3})^n$$
$$a_n - \sqrt{3}b_n = (2-\sqrt{3})^n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\dfrac{b_n}{a_n}$ を n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{e_n\}$ を

$$e_n = \frac{\sqrt{3}\,b_n}{a_n} - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，$n \geqq 3$ ならば

$$|e_n| < 0.001$$

であることを示せ．ただし，$0.071 < \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} < 0.072$ を用いてもよい．

解答は2枚目から

(1) $\begin{cases} a_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=(2a_n+3b_n)+\sqrt{3}(a_n+2b_n)=(2+\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3}b_n) \\ a_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}=(2a_n+3b_n)-\sqrt{3}(a_n+2b_n)=(2-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3}b_n) \end{cases}$

数理 石井

$a_1+\sqrt{3}b_1=2+\sqrt{3}$, $a_1-\sqrt{3}b_1=2-\sqrt{3}$ より

$\therefore \begin{cases} a_n+\sqrt{3}b_n=(2+\sqrt{3})^n & \cdots ① \\ a_n-\sqrt{3}b_n=(2-\sqrt{3})^n & \cdots ② \end{cases}$

(2) ①+② より $2a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ $\therefore a_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}$

①−② より $2\sqrt{3}b_n=(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n$ $\therefore b_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$

よって

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}} \quad //$$

(3) $e_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}-1=\dfrac{-2(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}$

$2+\sqrt{3}>0$, $2-\sqrt{3}>0$ より

$$|e_n|=\frac{2(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}=\frac{2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}=\frac{2\alpha^n}{1+\alpha^n}\quad\left(\because \alpha=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$0.071<\alpha<0.072$ より ③

$$|e_n|-|e_{n+1}|=\frac{2\alpha^n}{1+\alpha^n}-\frac{2\alpha^{n+1}}{1+\alpha^{n+1}}=\frac{2\alpha^n(1-\alpha)}{(1+\alpha^n)(1+\alpha^{n+1})}>0\quad(\because ③より)$$

よって $|e_n|>|e_{n+1}|$ だから

$n\geqq 3$ のとき $|e_n|\leqq|e_3|$

$$|e_3|<\frac{2\left(\frac{72}{1000}\right)^3}{1+\left(\frac{71}{1000}\right)^3}=\frac{2\cdot 72^3}{10^9+71^3}<\frac{2\cdot 75^3}{10^9}=\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3}{10^3}=\frac{\frac{27}{32}}{10^3}<\frac{1}{10^3}=0.001$$

したがって $n\geqq 3$ のとき

$$|e_n|<0.001 \quad //$$