

2015年 第2問

2 次の問いに答えよ。

(1)  $r$  を  $|r| < 1$  である実数とする. 自然数  $n$  に対して

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

とおく.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を  $r$  の式で表せ. ただし  $|r| < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  であることを用いてよい.(2)  $n$  を自然数とする. 2人の弓道部員 A, B が矢を的に命中させる確率は, A が  $\frac{4}{5}$ , B が  $\frac{1}{2}$  である. A, B が的に向かってそれぞれ  $n$  回ずつ矢を射る.(i)  $n = 1$  のとき, A の射る矢が命中する確率を  $p_1$  とし, A の射る矢が命中せずに B の射る矢が命中する確率を  $q_1$  とする.  $p_1 + q_1$  を求めよ.(ii)  $n \geq 2$  のとき, 1回目から  $(n-1)$ 回目まで A の射る矢も B の射る矢も命中せず,  $n$  回目に A の射る矢が命中する確率を  $p_n$  とする.  $p_n$  を求めよ.(iii)  $n \geq 2$  のとき, A の射る矢は 1回目から  $n$ 回目まで命中せず, B の射る矢は 1回目から  $(n-1)$ 回目まで命中せずに  $n$  回目のみ命中する確率を  $q_n$  とする.  $q_n$  を求めよ.(3) (2) で求めた  $p_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) に対して

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)p_n$$

とおく.  $E$  の値を求めよ.