

2015年 第2問

2

 次の問いに答えよ.
(1) r を $|r| < 1$ である実数とする. 自然数 n に対して

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

とおく.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を r の式で表せ. ただし $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい.

(2) n を自然数とする. 2人の弓道部員 A, B が矢を的に命中させる確率は, A が $\frac{4}{5}$, B が $\frac{1}{2}$ である. A, B が的に向かってそれぞれ n 回ずつ矢を射る.(i) $n = 1$ のとき, A の射る矢が命中する確率を p_1 とし, A の射る矢が命中せずに B の射る矢が命中する確率を q_1 とする. $p_1 + q_1$ を求めよ.(ii) $n \geq 2$ のとき, 1回目から $(n-1)$ 回目まで A の射る矢も B の射る矢も命中せず, n 回目に A の射る矢が命中する確率を p_n とする. p_n を求めよ.(iii) $n \geq 2$ のとき, A の射る矢は 1回目から n 回目まで命中せず, B の射る矢は 1回目から $(n-1)$ 回目まで命中せずに n 回目のみ命中する確率を q_n とする. q_n を求めよ.(3) (2) で求めた p_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)p_n$$

とおく. E の値を求めよ.