信州大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 $y=1$ の交点 P の座標を求めよ．

(3) 曲線 C，直線 $y=1$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ //

(別解)

(3) は (1) を使って部分積分でも出るが，y軸方向に積分した方が (99%) 速い

(2) $\log(x+\sqrt{x^2+1})=1$ より．$x+\sqrt{x^2+1}=e$

$\therefore \sqrt{x^2+1}=e-x$ …① 左辺は正より．$x<e$ …②

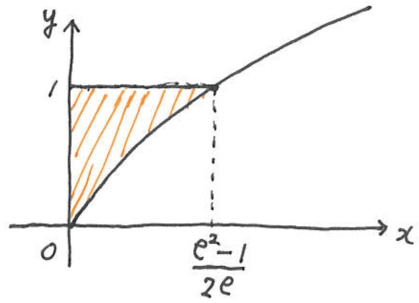
①の両辺を2乗して．$x^2+1=x^2-2ex+e^2$

$\therefore 2ex=e^2-1$ $\therefore x=\dfrac{e^2-1}{2e}$ これは②をみたす．

$\therefore P\left(\dfrac{e^2-1}{2e}, 1\right)$ //

(3) (1) より．$f'(x)>0$ $\therefore f(x)$：単調増加

$\therefore$ グラフは右のようになる．



$\therefore S=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}e^y-\frac{1}{2}e^{-y}\,dy$

$=\left[\dfrac{1}{2}e^y+\dfrac{1}{2}e^{-y}\right]_0^1$

$=\dfrac{e}{2}+\dfrac{1}{2e}-1$ //

ポイント!

$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

$\Updownarrow$

$e^y=x+\sqrt{x^2+1}$

$e^y-x=\sqrt{x^2+1}$ として

両辺を2乗して x について解くと．$x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$