

2016年 第2問

2  $n$  を自然数とし,  $a, b, r$  は実数で  $b > 0, r > 0$  とする. 複素数  $w = a + bi$  は  $w^2 = -2\bar{w}$  を満たすとする.  $\alpha_n = r^{n+1}w^{2-3n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする. ただし,  $i$  は虚数単位とし, 複素数  $z$  に共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す. 次の問いに答えよ.

- (1)  $a$  と  $b$  の値を求めよ.
- (2) 複素数平面上の3点  $O(0), A(\alpha_1), B(\bar{\alpha}_1)$  について,  $\angle AOB$  の大きさを  $\theta$  とする. ただし,  $0 \leq \theta \leq \pi$  とする.  $\theta$  の値を求めよ.
- (3)  $\alpha_n$  の実部を  $c_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする.  $c_n$  を  $n$  と  $r$  を用いて表せ.
- (4) (3) で求めた  $c_n$  を第  $n$  項とする数列  $\{c_n\}$  について, 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  が収束し, その和が  $\frac{8}{3}$  となるような  $r$  の値を求めよ.