東京農工大学

2014年 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 eは自然対数の底とする．Oを原点とする座標平面に3点

$$\mathrm{A}(e^{-\theta}+\sqrt{3},\ e^{-\theta}),\quad \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{C}(\sqrt{3},\ 0)$$

がある．ただし，$\theta \geqq 0$とする．次の問いに答えよ．

(1) 三角形ABCの面積を$F(\theta)$とする．$F(\theta)$を求めよ．

(2) $F(\theta)$の導関数を$F'(\theta)$とする．区間$0<\theta<2\pi$において$F'(\theta)=0$となるθの値をすべて求めよ．

(3) nを自然数とする．区間$2(n-1)\pi \leqq \theta \leqq 2n\pi$における$F(\theta)$の最大値，最小値をそれぞれ$\alpha_n$，$\beta_n$とする．$\alpha_n$，$\beta_n$を求めよ．また最大値を与える$\theta$の値と最小値を与える$\theta$の値を求めよ．

(4) (3)で求めたα_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，$S=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$とおく．$S$の値を求めよ．

(1) 3点をx軸方向に$-\sqrt{3}$移動した点をそれぞれA′, B′, C′とおくと，

$A'(e^{-\theta}, e^{-\theta})$，$B'(\cos\theta-\sqrt{3}, \sin\theta)$，$C'(0, 0)$

$$\therefore F(\theta)=\frac{1}{2}\left|e^{-\theta}\sin\theta-e^{-\theta}(\cos\theta-\sqrt{3})\right|$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\theta}\left|\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{3}\right|$$

ここで，$\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{3}=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}>0$ より，

$\underline{F(\theta)=\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{3})}$ //

(2) (1)より，$F'(\theta)=-\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{3})+\frac{1}{2}e^{-\theta}(\cos\theta+\sin\theta)$

$$=\frac{1}{2}e^{-\theta}(2\cos\theta-\sqrt{3})$$

$e^{-\theta}>0$ より，$F'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき．

$0<\theta<2\pi$ より．$\underline{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi \text{ のとき}}$ //

(3) (2)と同様にして，$F'(\theta)=0$ となるのは．$\theta=2(n-1)\pi+\frac{\pi}{6}$，$2(n-1)\pi+\frac{11}{6}\pi$

すなわち，$\theta=(2n-\frac{11}{6})\pi$，$(2n-\frac{1}{6})\pi$

$F(2(n-1)\pi)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}e^{-2(n-1)\pi}$

$F((2n-\frac{11}{6})\pi)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}e^{-(2n-\frac{11}{6})\pi}$

$F((2n-\frac{1}{6})\pi)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}e^{-(2n-\frac{1}{6})\pi}$

$F(2n\pi)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}e^{-2n\pi}$

θ	$2(n-1)\pi$	$\cdots$	$(2n-\frac{11}{6})\pi$	$\cdots$	$(2n-\frac{1}{6})\pi$	$\cdots$	$2n\pi$
$F'(\theta)$		+	0	−	0	+	
$F(\theta)$		↗		↘		↗	

0001867902318999

東京農工大学

2014年 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ eは自然対数の底とする．Oを原点とする座標平面に3点

$$\mathrm{A}(e^{-\theta}+\sqrt{3},\ e^{-\theta}),\quad \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{C}(\sqrt{3},\ 0)$$

がある．ただし，$\theta \geqq 0$とする．次の問いに答えよ．

(1) 三角形ABCの面積を$F(\theta)$とする．$F(\theta)$を求めよ．

(2) $F(\theta)$の導関数を$F'(\theta)$とする．区間$0<\theta<2\pi$において$F'(\theta)=0$となるθの値をすべて求めよ．

(3) nを自然数とする．区間$2(n-1)\pi \leqq \theta \leqq 2n\pi$における$F(\theta)$の最大値，最小値をそれぞれ$\alpha_n$，$\beta_n$とする．$\alpha_n$，$\beta_n$を求めよ．また最大値を与える$\theta$の値と最小値を与える$\theta$の値を求めよ．

(4) (3)で求めたα_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，$S=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$とおく．$S$の値を求めよ．

(3) のつづき．

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} > \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ かつ $e^{-(2n-\frac{11}{6})\pi} > e^{-2n\pi}$ より，$F\left((2n-\frac{11}{6})\pi\right) > F(2n\pi)$

また，$$\frac{F(2(n-1)\pi)}{F\left((2n-\frac{1}{6})\pi\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}e^{-2(n-1)\pi}}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}e^{-(2n-\frac{1}{6})\pi}} = \frac{2e^{2\pi}}{e^{\frac{1}{6}\pi}} = 2e^{\frac{11}{6}\pi} > 1$$

$$\therefore F(2(n-1)\pi) > F\left((2n-\tfrac{1}{6})\pi\right)$$

$$\therefore \alpha_n = F\left((2n-\tfrac{11}{6})\pi\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}e^{-(2n-\frac{11}{6})\pi} \quad \left(\theta=(2n-\tfrac{11}{6})\pi\right) //$$

$$\beta_n = F\left((2n-\tfrac{1}{6})\pi\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}e^{-(2n-\frac{1}{6})\pi} \quad \left(\theta=(2n-\tfrac{1}{6})\pi\right) //$$

(4) $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4}e^{\frac{11}{6}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n\pi}$$

初項$e^{-2\pi}$，公比$e^{-2\pi}$ $(0<e^{-2\pi}<1)$の等比数列の和 → 収束

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4}e^{\frac{11}{6}\pi}\cdot\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})e^{\frac{11}{6}\pi}}{4(e^{2\pi}-1)} //$$