0002071818297999

東京農工大学

2015年 第2問　1枚目／2枚

数理 石#K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) r を $|r|<1$ である実数とする．自然数 n に対して

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

とおく．

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

を r の式で表せ．ただし $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい．

(2) n を自然数とする．2人の弓道部員A，Bが矢を的に命中させる確率は，Aが $\frac{4}{5}$，Bが $\frac{1}{2}$ である．A，Bが的に向かってそれぞれ n 回ずつ矢を射る．

(i) $n=1$ のとき，Aの射る矢が命中する確率を p_1 とし，Aの射る矢が命中せずにBの射る矢が命中する確率を q_1 とする．p_1+q_1 を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，1回目から $(n-1)$ 回目までAの射る矢もBの射る矢も命中せず，n 回目にAの射る矢が命中する確率を p_n とする．p_n を求めよ．

(iii) $n \geqq 2$ のとき，Aの射る矢は1回目から n 回目まで命中せず，Bの射る矢は1回目から $(n-1)$ 回目まで命中せずに n 回目のみ命中する確率を q_n とする．q_n を求めよ．

(3) (2)で求めた p_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)p_n$$

とおく．E の値を求めよ．

(1)

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} \quad \cdots ①$$

$$rS_n = \quad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \quad \cdots ②$$

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \quad (\because ①-②より)$$

$|r|<1$ より，$r \neq 1$ なので，$S_n = \dfrac{1-r^n}{(1-r)^2} - \dfrac{nr^n}{1-r}$

$|r|<1$ より，$n\to\infty$ のとき，$r^n \to 0$

また，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ を用いると，$S = \lim_{n\to\infty} S_n$

$$= \underline{\frac{1}{(1-r)^2}} \quad //$$

数理
石井K

(2) (i)

$p_1 = \frac{4}{5}$, $q_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\therefore p_1 + q_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{10}$

$= \underline{\frac{9}{10}}$ // ← AもBも命中しない確率を求めて，余事象を考えた方が速かった…

(ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{5}$

$\therefore \underline{p_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 2)}$ //

(iii) $q_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$

$= \underline{\left(\frac{1}{10}\right)^{n} \quad (n \geqq 2)}$ //

(3) $E = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot \frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$= \frac{8}{5} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} - \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ 無限等比級数の和

(1)の $r = \frac{1}{10}$ のときになる

$|r| < 1$ をみたしている

よって，$E = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$

$= \frac{8}{5} \cdot \frac{100}{81} - \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{9}$

$= \underline{\frac{88}{81}}$ //