

2016年第3問

3  $a$  を正の実数とし、 $x$  の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = e^{-ax} \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right)$$

で定める。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  の導関数を  $f'(x)$  とする。  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  が成り立つとき、 $a$  の値を求めよ。

(2)  $f'(x) = 0$  かつ  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$  を満たす  $x$  がちょうど 3 個存在するように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

(3)  $a$  の値が (2) で定めた範囲にあるとする。このとき、方程式  $f'(x) = 0$  の解を  $x_1, x_2, x_3$   $\left(-\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{3}\right)$  とし、

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3)$$

とおく。

(i)  $y_1, y_2, y_3$  を大きさの順に並べよ。

(ii)  $\tan x_3$  を  $a$  の式で表せ。