

2012年理工（情報科・工業化・機械工・土木工）第2問

2 r を $0 < r < 1$ を満たす実数として、次のように行列とベクトルを定める。

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 2r-1 & 1-r \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

またベクトル $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = Q, \quad Q_n = AQ_{n-1} + P \quad (n \geq 2)$$

として定める。

- (1) $AP = \alpha P$, $AQ = \beta Q$ を満たす定数 α , β を求めよ。
- (2) $A^n P$, $A^n Q$ を求めよ。
- (3) $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を求めよ。
- (4) 座標平面において、各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し座標が $(a_n, 0)$ である点を X_n , 座標が $(a_n, b_n - a_n)$ である点を Y_n とする。さらに、台形 $X_n X_{n+1} Y_{n+1} Y_n$ の面積を S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とし、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

とする。

- (i) S を求めよ。
- (ii) r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき、 S の最大値とそのときの r の値を求めよ。