2012年 理（数・物・化） 第3問

$\boxed{3}$ $\{\theta_k\}$を初項0，交差$\dfrac{\pi}{4}$の等差数列，$\{r_k\}$を初項1，公比$\dfrac{1}{2}$の等比数列とし，自然数kに対して，行列A_k，B_kを

$$A_k=\begin{pmatrix} r_k\cos\theta_k & r_k\sin\theta_k \\ r_k\sin\theta_k & -r_k\cos\theta_k \end{pmatrix},\quad B_k=\begin{pmatrix} r_k\cos\theta_k & -r_k\sin\theta_k \\ -r_k\sin\theta_k & -r_k\cos\theta_k \end{pmatrix}$$

とおく．$C_k=A_kA_{k+1}$，$D_k=B_kB_{k+1}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) C_kをkを用いて表せ．

(2) D_kをkを用いて表せ．

(3) mを自然数とするとき，次の行列の和

$$\left(\frac{1}{r_kr_{k+1}}C_k\right)^2+\left(\frac{1}{r_kr_{k+1}}C_k\right)^4+\left(\frac{1}{r_kr_{k+1}}C_k\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{r_kr_{k+1}}C_k\right)^{2m}$$

を求めよ．

(4) $C_k^2D_k^2$を求めよ．

(5) 次の行列の和

$$C_1^2D_1^2+2C_2^2D_2^2+3C_3^2D_3^2+\cdots+nC_n^2D_n^2$$

を$\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}w_n$を求めよ．

ただし，必要ならば，実数a（$a>1$）に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$が成り立つことを用いてよい．