

2015年理工（物理・応用生物科・経営工）第1問

1 次の文章中の から までに当てはまる数字0~9を求めよ.

(1) 実数 a に対し, 2つの2次関数

$$f(x) = x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8$$

$$g(x) = -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16$$

を考える.

(i) すべての実数 x に対して $g(x) < f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$$a > -\text{ア} \quad \text{かつ} \quad a \neq \text{イ}$$

である.

(ii) $g(x)$ の最大値は $-\text{ウ} a^4 - \text{エ} a^3 - \text{オ} a^2$ である.

(iii) 次の条件(*)を満たす実数 b がただ1つ存在するとする.

(*) 「すべての実数 x に対して $g(x) \leq b \leq f(x)$ が成り立つ。」

このとき,

$$a = -\text{カ} \quad \text{または} \quad a = \text{キ}$$

であり, $a = -\text{カ}$ のときは $b = -\text{ク} \text{ケ}$, $a = \text{キ}$ のときは $b = -\text{コ} \text{サ}$ である.

(2) 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25a_n - 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$\text{シ} a_{n+1} + b_{n+1} = \text{ス} (\text{シ} a_n + b_n)$$

であるので,

$$b_n = \text{セ}^n - \text{ソ} a_n$$

である. これにより

$$\frac{a_{n+1}}{\text{タ}^n} = \frac{a_n}{\text{タ}^{n-1}} + 1$$

となる. したがって

$$a_n = n \cdot \text{チ}^{n-1} \text{ツ}$$

となる.



(3) 平面上に， $\triangle ABC$ とその内部の点 O をとったとき，

$$OA = 1 + \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{3}$$

$$OC = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$$

となっていた．

このとき，内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の値は $-\frac{\boxed{\text{テ}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であるので

$$\angle AOB = \boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}^\circ$$

である．同様に $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -\frac{\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ から

$$\angle AOC = \boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}^\circ$$

である．したがって，

$$\angle BOC = \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ$$

となる．また，

$$\sin \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ム}}} (\boxed{\text{メ}} + \sqrt{\boxed{\text{モ}}})}{4}$$

である．したがって， $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ヤ}} + \frac{\boxed{\text{ユ}} \sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{2}$ である．