2014年 基礎工 第4問

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x}\cos(2\pi x)\,dx,\quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x}\sin(2\pi x)\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．ただし，e は自然対数の底を表す．

（1）a_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより，

$$a_n = -\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}b_n$$

がわかる．

一方，b_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより，

$$b_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}a_n - \frac{e^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}\, e^{\boxed{\text{カ}}n + \boxed{\text{キ}}}}$$

がわかる．

これらの関係式より，a_n は

$$a_n = \frac{\pi\left(e^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}}\right)}{\boxed{\text{コ}}\left(\pi^{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}}\right)e^{\boxed{\text{ス}}n + \boxed{\text{セ}}}}$$

となることがわかる．

（2）無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}\left(\pi^{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}}\right)\left(e^{\boxed{\text{ツ}}} - e\right)}$ となる．