2014年 薬学部（薬） 第4問

4 r は2以上9以下の自然数とする．n を r 以上の自然数として，次の条件を満たす n 桁の自然数を考える．

（ｉ）各位の数は1から r までの数 1，2，…，r のどれかである．

（ii）1，2，…，r のどの一つも必ずどこかの位に現れる．

このような自然数全体の集合を考え，この集合の要素の個数を ${}_r\mathrm{S}_n$ とおく．また，この集合のすべての要素の和を $f_r(n)$ とおく．

(1) $r=2$ とする．

（ｉ）${}_2\mathrm{S}_2=$ $\boxed{\text{ア}}$，${}_2\mathrm{S}_3=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

一般に，${}_2\mathrm{S}_n=\boxed{\text{ウ}}^{\,n}-\boxed{\text{エ}}$ である．

（ii）$f_2(2)=\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}$，$f_2(3)=\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}$ である．

一般に，$f_2(n)=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\left(\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}^{\,n}-1\right)\cdot{}_2\mathrm{S}_n$ が成り立つ．

(2) $r=3$ とする．

（ｉ）${}_3\mathrm{S}_n=\boxed{\text{セ}}^{\,n}-\boxed{\text{ソ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{\,n}+\boxed{\text{タ}}$ である．

（ii）$f_3(n)=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}^{\,n}-1\right)\cdot{}_3\mathrm{S}_n$ が成り立つ．

(3) $r=4$ とする．

（ｉ）${}_4\mathrm{S}_n=\boxed{\text{テ}}^{\,n}-\boxed{\text{ト}}\cdot\boxed{\text{セ}}^{\,n}+\boxed{\text{ナ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{\,n}-\boxed{\text{ニ}}$ である．

（ii）$f_4(n)=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}\boxed{\text{ノ}}}\left(\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}^{\,n}-1\right)\cdot{}_4\mathrm{S}_n$ が成り立つ．