

2015年理(数)第2問

2 s を $-1 \leq s \leq 1$ を満たす実数とする. xy 平面上のベクトル \vec{a}_s , \vec{b}_s , \vec{c}_s を

$$\vec{a}_s = (s, \sqrt{1-s^2}), \quad \vec{b}_s = (\sqrt{1-s^2}, -s), \quad \vec{c}_s = (s\sqrt{1+s^2}, \sqrt{1-s^4})$$

と定める. t を実数とし, $f_t(s)$, $g_t(s)$, $h_t(s)$, $k_t(s)$ を

$$\vec{a}_s + \frac{t}{|\vec{b}_s|} \vec{b}_s = (f_t(s), g_t(s))$$

$$\vec{a}_s - \frac{t}{|\vec{c}_s|} \vec{c}_s = (h_t(s), k_t(s))$$

により定める. さらに, s を媒介変数とする2つの曲線

$$C_t: x = f_t(s), y = g_t(s) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq s \leq 1\right),$$

$$K_t: x = h_t(s), y = k_t(s) \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

を考える. 次の各問いに答えよ.

- (1) $f_t(s)$, $g_t(s)$, $h_t(s)$, $k_t(s)$ を s と t を用いて表せ.
- (2) \vec{a}_s と \vec{b}_s のなす角, および, \vec{a}_s と \vec{c}_s のなす角を求めよ.
- (3) $f_t(s)^2 + g_t(s)^2$ を t のみを用いて表せ.
- (4) t が 0 から $\sqrt{3}$ まで動くとき, C_t が通過する部分を D とする. D を図示せよ.
- (5) (4) で定めた D の面積を求めよ.
- (6) (4) で定めた D を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ.
- (7) $K_{\frac{1}{2}}$, K_1 , $K_{\frac{3}{2}}$ を図示せよ.
- (8) t が $\frac{1}{2} \leq |t-1| \leq 1$ を満たす範囲を動くとき, K_t が通過する部分の面積を求めよ.