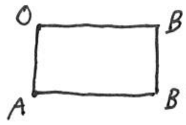
兵庫県立大学

2014年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ で表される移動によって点Aは点A′に，点Bは点B′に移るとする．Oを原点とする．OA＝1，A＝A′であって，かつ四角形OAB′Bが長方形のとき，点A，点Bの座標を求めよ．

$OA = 1$ より. $A(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと.



$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta - \sin\theta \\ 4\cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}$$

$A = A'$ より. $\cos\theta = 3\cos\theta - \sin\theta$ かつ $\sin\theta = 4\cos\theta - \sin\theta$

$\therefore 2\cos\theta = \sin\theta$ 両辺2乗して $4\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\therefore 4\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 0$ $\therefore \cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$ $\therefore \cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore A\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$B(x, y)$ とおくと. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 4x - y \end{pmatrix}$ より $B'(3x - y, 4x - y)$

$\therefore \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BB'}$ より $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = (2x - y, 4x - 2y)$

$\therefore 2x - y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdots ①$

$\cancel{\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB'}}$ ~~より.~~ $\cancel{(x, y) = \left(3x - y \mp \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 4x - y \mp \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

$\cancel{\therefore 2x - y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 2x - y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$OA \perp OB$ より

$\cancel{\therefore 2x - y}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ $\therefore \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}x \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}y = 0$ $\therefore \pm x \pm 2y = 0$

$\therefore x = -2y \cdots ②$

①②より. $x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$, $y = \mp\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

$\therefore A\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), B\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{25}, -\dfrac{\sqrt{5}}{25}\right)$ または $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), B\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}, \dfrac{\sqrt{5}}{25}\right)$ //