

2013年薬学部第2問

2 逆行列をもつ行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  によって表される1次変換を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この変換によって  $xy$  平面上の任意の2点  $P(x_1, y_1)$  および  $Q(x_2, y_2)$  がそれぞれ  $P'(x_1', y_1')$  および  $Q'(x_2', y_2')$  に移されるとき、2点間の距離が変換によって変化しない、つまり、 $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{P'Q'}|^2$  であるための必要十分条件は、

$$A^T A = E \quad \dots\dots(*)$$

であることを示せ。ただし、 $A^T$  は  $A$  の行と列を入れ替えた行列要素をもつ行列、すなわち、

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である。また、 $E$  は単位行列である。

- (2) 原点のまわりの回転移動および  $x$  軸に関する対称移動の1次変換を、それぞれ、 $f$  および  $g$  とする。これらの1次変換を表す行列は、それぞれ、上の条件(\*)を満たすことを確かめよ。
- (3) (2) で考えた1次変換  $f$  および  $g$  を表す行列をそれぞれ  $F$  および  $G$  とし、 $A = FGF^{-1}$  で定義される行列  $A$  によって表される1次変換を考える。この変換によって直線  $y = mx$  上の任意の点がそれ自身に移されるとき、 $A$  を実数  $m$  を用いて表せ。ただし、 $F^{-1}$  は  $F$  の逆行列を表す。
- (4) (1) で考えた点  $P, Q, P', Q'$  の座標を用いて、 $S = x_1 y_2 - y_1 x_2$  および  $S' = x_1' y_2' - y_1' x_2'$  を定義する。 $P, Q$  から  $P', Q'$  への変換を表す行列が(3)で求めた  $A$  で与えられるとき、 $S$  と  $S'$  の関係式を求めよ。