

2013年 数学科・物理学科（共通問題）第6問

6 座標平面上の3点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ について考える.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $I + J + J^2$, J^3 を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = J^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき, 3点 A, B, C は正三角形をなすことを示せ.

(3) 3点 A, B, C が異なり,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + J^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, 三角形 ABC が正三角形となることを示せ.