0002005544997999

慶應義塾大学

2015年 商学部 第1問

1枚目／2枚

数理
石井K

$\boxed{1}$ Oを原点とする座標空間に，2点 A(0, 1, 2)，B(1, 2, 0) がある．

(1) △OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\ 1\ }\boxed{\ 2\ }}}{\boxed{\ 3\ }}$ である．

2 1
2

(2) 点Cの位置を，位置ベクトル

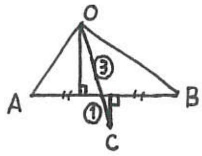
$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

によって定める．このとき，△ABC と △OAB の面積の比は

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle OAB}=\frac{\boxed{\ 4\ }}{\boxed{\ 5\ }}$$

1
3

である．



(3) 2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ の両方に垂直な単位ベクトルのうちの1つは，

2 1　　4　　2

$$\frac{\sqrt{\boxed{\ 6\ }\boxed{\ 7\ }}}{21}\left(\boxed{\ 8\ },\ -\boxed{\ 9\ },\ 1\right)$$

である．

(4) t を実数として，点 $D\left(\dfrac{t^2}{4},\ 4t,\ 19\right)$ を定める．このとき，四面体 ABCD の体積 $V(t)$ は

1

$$V(t)=\frac{\boxed{\ 10\ }}{\boxed{\ 11\ }\boxed{\ 12\ }}\left(t^2-\boxed{\ 13\ }t+\boxed{\ 14\ }\boxed{\ 15\ }\right)$$

1 8　　8　　1 9

である．

(5) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{n+1}{10}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$V(a_n)$ は，$n=\boxed{\ 16\ }$ で最小となる．

7

(1) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0+2+0=2$

$\therefore\ \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\cdot 5-2^2}$

$=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ //

(2) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

∴左図のようになる．

△ABC と △OAB は，共通の底辺 AB をもち，高さの比が 3 : 1 の三角形　$\therefore\ \dfrac{\triangle ABC}{\triangle OAB}=\dfrac{1}{3}$ //

(3) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ の両方に垂直なベクトルを

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$ より．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=y+2z=0$

同様に，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=x+2y=0$

$\therefore\ z=-\dfrac{1}{2}y,\ x=-2y$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}$ のうち1つは，$\vec{p}=\left(-2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ と

表せる．∴求めるベクトルは，

$\pm\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\dfrac{\pm 2}{\sqrt{21}}\left(-2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

このうち，z 成分が正のものは，

$\dfrac{\sqrt{21}}{21}(4,\ -2,\ 1)$ //

2枚目につづく．

数理 石井K

(4) 点Dから平面ABCに下ろした垂線と平面ABCとの交点をHとおき、

$\overrightarrow{OH} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ とおくと、

$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OH}$

$= \left(\frac{t^2}{4} - n,\ 4t - m - 2n,\ 19 - 2m\right)$

これと(3)で求めたベクトルが平行であるから

$\overrightarrow{HD} = k\cdot(4, -2, 1)$ となる実数 k が存在する。

$$\therefore \begin{cases} \frac{t^2}{4} - n = 4k & \cdots\cdots ① \\ 4t - m - 2n = -2k & \cdots ② \\ 19 - 2m = k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①より、$n = \frac{t^2}{4} - 4k \quad \cdots ①'$、 ③より、$m = \frac{19}{2} - \frac{k}{2} \quad \cdots ③'$

①'と③'を②に代入して、

$4t - \frac{19}{2} + \frac{k}{2} - \frac{t^2}{2} + 8k = -2k \qquad \therefore k = \frac{t^2-8t+19}{21}$

$\therefore \overrightarrow{HD} = \frac{t^2-8t+19}{21}(4, -2, 1) \qquad \therefore |\overrightarrow{HD}| = \frac{t^2-8t+19}{21}\cdot\sqrt{21}$

$$\therefore V(t) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times \frac{\sqrt{21}\,(t^2-8t+19)}{21}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{\sqrt{21}\,(t^2-8t+19)}{21}$$

$$= \underline{\frac{1}{18}(t^2-8t+19)}$$ //

(5) (4)より、$V(t) = \frac{1}{18}\left\{(t-4)^2 + 3\right\} \quad \cdots (*)$

また、$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{10}$

両辺を $n=1$ から n まで足し合わせて、$a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10}(k+1) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore a_{n+1} = 1 + \frac{n}{20}\cdot(n+3)$ これは $n=0$ のときも成り立つので、

$a_n = 1 + \frac{1}{20}(n-1)(n+2) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ これは $n \geqq 1$ で単調増加

$a_7 = \frac{37}{10} < 4$、$a_8 = \frac{9}{2} > 4$ (*)より、a_n が4に最も近いのは、

$\underline{n = 7}$ //