

2013年工学部第2問

2  $a, b$  を実数とし、行列  $A$  を2次の正方行列とする。  $x, y$  についての連立1次方程式を、行列を用いて

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \dots\dots(*)$$

と表す。次に答えよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  のとき、連立1次方程式(\*)を解け。

(2)  $c$  を実数とし、  $a \neq 0, b \neq 0$  とする。また、  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$  とする。

(i)  $a \neq bc$  とする。連立1次方程式(\*)がただ1つの解をもつことを示せ。また、連立1次方程式  $A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  もただ1つの解をもつことを示せ。

(ii) 連立1次方程式(\*)が解をもたないための必要十分条件を  $a, b, c$  を用いて表せ。この条件が成り立つとき、連立1次方程式  $A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  も解をもたないことを示せ。

(iii) 連立1次方程式(\*)が解を無数にもつための必要十分条件を  $a, b, c$  を用いて表せ。この条件が成り立つとき、自然数  $m$  に対して、連立1次方程式

$$(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2m-1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

も解を無数にもつことを示せ。