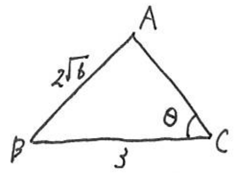
東北学院大学

2014年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 三角形ABCにおいて，$AB = 2\sqrt{6}$，$BC = 3$，$\angle BCA = \theta$とする．$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$であるとき，次の問いに答えよ．



(1) 辺CAの長さを求めよ．

(2) 三角形ABCの面積Sを求めよ．

(3) 三角形ABCの外接円の半径Rを求めよ．

(4) 辺ABの中点をPとし，辺CA上に$CQ = 3$となる点Qをとる．線分PQの長さを求めよ．

(1) 余弦定理より．$(2\sqrt{6})^2 = 3^2 + CA^2 - 2 \cdot 3 \cdot CA \cdot \cos\theta$

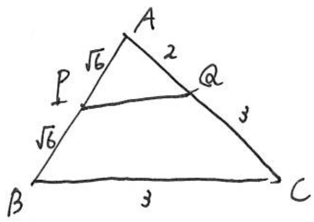
$\therefore 24 = 9 + CA^2 - 2CA \qquad CA^2 - 2CA - 15 = 0$

$\therefore (CA-5)(CA+3) = 0 \qquad CA > 0$ より． $\underline{CA = 5}$ //

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ より． $\sin\theta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \quad \therefore S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \underline{5\sqrt{2}}$ //

(3) 正弦定理より，$\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin\theta} = 2R \qquad \therefore \underline{R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ //

(4) 余弦定理より．



$9 = 24 + 25 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 5 \cdot \cos\angle BAC$

$\therefore \cos\angle BAC = \dfrac{40}{20\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

$\therefore PQ^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

$= 6 + 4 - 8$

$= 2$

$PQ > 0$ より． $\underline{PQ = \sqrt{2}}$ //