

2012年理（数理情報科）第1問

1 内のカタカナにあてはまる0から9までの数字を求めよ。

(1) k を自然数とすると、不等式

$$k > \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{2}$$

が成立する。この不等式の右辺の逆数は ア $(\sqrt{k} - \sqrt{k - \text{イ}})$ であるから、不等式

$$\frac{1}{k} < \text{ア} (\sqrt{k} - \sqrt{k - \text{イ}})$$

を得る。この不等式がすべての自然数 k に対して成立することより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \text{ウ}$$

であることがわかる。

(2) 自然数 n に対し、

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+n+1)}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

と定める。

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) s_{n+1}$ を求めよ。

(ヒント： $n \geq 2$ であるような各自然数 n に対して $s_{n+1} - s_n$ を考えることにより、(i) の結果が使える形に変形せよ。)

(iii) n を自然数とする。また、 p は自然数で、等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n+1} \right) = s_p$$

が成立しているとする。このとき、 p を n の1次式の形に表せ。

(iv) n を自然数とし、 p は(iii)における通りであるとする。また、 q は自然数で、等式

$$a_n = \frac{s_p}{q}$$

が成立しているとする。このとき、 q を n の1次式の形に表せ。

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ。