0002035904697999

東京理科大学

2014年 基礎工 第1問

数理 石井K

1 A, B は共に実数を成分とする2次の正方行列で，条件

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},\quad A^{-1}B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

を満たすものとする．

(1) $B^{-1}A=\begin{pmatrix} \boxed{ア} & -\boxed{イ} \\ \boxed{ウ} & -\boxed{エ} \end{pmatrix}$ である． $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A^2=\begin{pmatrix} \boxed{オ} & -\boxed{カ} \\ \boxed{キ} & \boxed{ク} \end{pmatrix}$ である． $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

(3) 条件を満たす A は以下の4つである．

$$A=\pm\begin{pmatrix} \boxed{ケ} & -\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}} \\ \boxed{シ} & \boxed{ス} \end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix} \boxed{セ} & \boxed{ソ} \\ \boxed{タ} & -\boxed{チ} \end{pmatrix}$$

$\pm\begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　　$\pm\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(1) $B^{-1}A=(A^{-1}B)^{-1}$ であるから，$\det(A^{-1}B)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$

$\therefore B^{-1}A=6\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}$ //

ポイント
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(2) $A^2=(AB)(B^{-1}A)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}$ //

(3) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

$\therefore$ (2)より，$c(a+d)=0$ かつ $b(a+d)=-7$

$\therefore$ $a+d\neq 0$ より，$c=0$　$\therefore$ $a^2=4$ かつ $d^2=9$　$\therefore$ $a=\pm 2$，$d=\pm 3$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{5} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\underline{A=\pm\begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$ //