

2015年理(数)第2問

2  $s$  を  $-1 \leq s \leq 1$  を満たす実数とする.  $xy$  平面上のベクトル  $\vec{a}_s, \vec{b}_s, \vec{c}_s$  を

$$\vec{a}_s = (s, \sqrt{1-s^2}), \quad \vec{b}_s = (\sqrt{1-s^2}, -s), \quad \vec{c}_s = (s\sqrt{1+s^2}, \sqrt{1-s^4})$$

と定める.  $t$  を実数とし,  $f_t(s), g_t(s), h_t(s), k_t(s)$  を

$$\vec{a}_s + \frac{t}{|\vec{b}_s|} \vec{b}_s = (f_t(s), g_t(s))$$

$$\vec{a}_s - \frac{t}{|\vec{c}_s|} \vec{c}_s = (h_t(s), k_t(s))$$

により定める. さらに,  $s$  を媒介変数とする2つの曲線

$$C_t: x = f_t(s), y = g_t(s) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq s \leq 1\right),$$

$$K_t: x = h_t(s), y = k_t(s) \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

を考える. 次の各問いに答えよ.

- (1)  $f_t(s), g_t(s), h_t(s), k_t(s)$  を  $s$  と  $t$  を用いて表せ.
- (2)  $\vec{a}_s$  と  $\vec{b}_s$  のなす角, および,  $\vec{a}_s$  と  $\vec{c}_s$  のなす角を求めよ.
- (3)  $f_t(s)^2 + g_t(s)^2$  を  $t$  のみを用いて表せ.
- (4)  $t$  が 0 から  $\sqrt{3}$  まで動くとき,  $C_t$  が通過する部分を  $D$  とする.  $D$  を図示せよ.
- (5) (4) で定めた  $D$  の面積を求めよ.
- (6) (4) で定めた  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ.
- (7)  $K_{\frac{1}{2}}, K_1, K_{\frac{3}{2}}$  を図示せよ.
- (8)  $t$  が  $\frac{1}{2} \leq |t-1| \leq 1$  を満たす範囲を動くとき,  $K_t$  が通過する部分の面積を求めよ.