

2012年理(数)第2問

2  $s, t$  を実数とし,  $0 < s < 1$  とする. 座標空間内の3点

$$P((2-s) + s \cos t, 0, (2-s) + s \sin t),$$

$$Q\left(\frac{2-s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{2-s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos t, (2-s) + s \sin t\right),$$

$$R(0, 0, (2-s) + s \sin t)$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) P, Q, R を含む平面の方程式を求めよ.
- (2)  $RP = RQ$  を示せ.

点 Q は, 点 R を中心とし RP を半径とする円周上に存在する. このとき, 弦 PQ に対する弧 PQ と, 半径 RP および半径 RQ で囲まれる扇形を  $C$  とする. ただし,  $C$  の中心角  $\angle PRQ$  は  $\pi$  以下とする.

- (3)  $C$  の面積を  $s$  と  $t$  を用いて表せ.
- (4)  $t$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき, R の  $z$  座標の動く範囲を  $s$  を用いて表せ.
- (5)  $t$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき, 扇形  $C$  が通過する部分の体積  $V_1$  を  $s$  を用いて表せ.
- (6)  $t$  が  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$  の範囲を動くとき, 扇形  $C$  が通過する部分の体積  $V_2$  を  $s$  を用いて表せ.
- (7) 上の (5), (6) の  $V_1, V_2$  に対して,  $s$  が  $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}$  の範囲を動くときの  $V_1 - V_2$  の最大値とそのときの  $s$  の値を求めよ.