

2015年理工（数・建築・電気電子情報工）第2問

2  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数として、関数  $f(x)$  を

$$f(x) = -x^2 + (1+t^2)x - t^2$$

と定める。座標平面において、原点  $O$  から放物線  $y = f(x)$  へ引いた接線のうち、接点の  $x$  座標が正のものを考える。その接点を  $P(p, f(p))$  とおく。

- (1) 点  $P$  の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 放物線  $y = f(x)$  の  $x \leq p$  の部分、 $x$  軸、直線  $x = p$  で囲まれる図形の面積を  $S_1$  とする。  $S_1$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 線分  $OP$ 、 $x$  軸、直線  $x = p$  で囲まれる図形の面積を  $S_2$  とし、(2) の  $S_1$  に対して  $S = S_2 - S_1$  とおく。  $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くとき  $S$  を最大にする  $t$  の値を求めよ。