0001856273418999

福井大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通るような t の値を求めよ．

(3) t を (2) で求めた値とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ によって囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

数理 石井K

(1) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $\quad\therefore f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ //

(2) $(t,f(t))$ における接線は，

$$y=\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}(x-t)+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

これが $\left(0,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通るので，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\dfrac{t(t^2+1)}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$

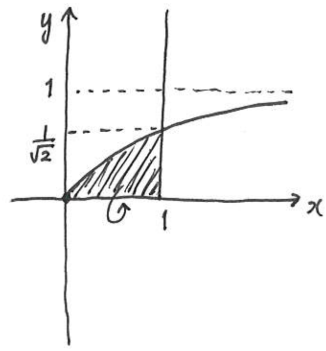
$\therefore 8t^6=(t^2+1)^3 \qquad (2t^2)^3-(t^2+1)^3=0$

$\therefore (t^2-1)(7t^4+4t^2+1)=0 \qquad \therefore t=\pm 1$

$t=1$ のとき．接線は $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となり，$\left(0,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通る．

$t=-1$ のとき，〃 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となり 〃 通らない．

$\therefore t=1$ //



(3) $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1 1-\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\pi-\pi\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ ← $x=\tan\theta$ とおいて置換積分

$=\pi-\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

$=\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$ //