2014 年 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次式で与えられる 2 つの放物線 C_1，C_2 について，以下の問いに答えよ．

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = ax^2 + 1$$

ただし，a は 0 でない定数とする．

(1) C_1 と C_2 が 2 個の共有点をもつように，定数 a のとりうる値の範囲を求めよ．さらに，そのときの共有点の座標をすべて求めよ．

(2) a の値が (1) で求めた範囲にあるとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の共有点を P とする．点 P における C_1 と C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と ℓ_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(1) $ax^2+1-x^2=0$ が異なる2つの実数解をもてばよいので

$(a-1)x^2=-1$

(i) $a=1$ のとき

解なし

(ii) $a>1$ のとき

$x^2 = \dfrac{-1}{a-1} < 0$

∴ 解なし

(iii) $a<1$ のとき

$x^2 = \dfrac{1}{1-a} > 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1-a}}$

(i)〜(iii)より

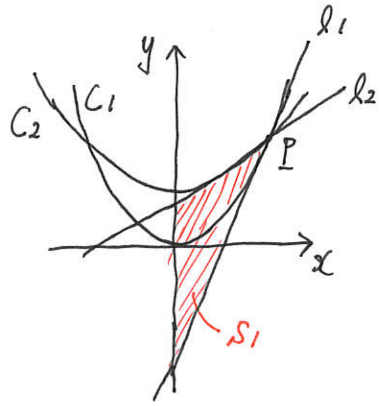
$\underline{a<1}$ //　このとき共有点は　$\underline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}, \dfrac{1}{1-a}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}, \dfrac{1}{1-a}\right)}$ //

(2) $\ell_1 : y = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\right)+\dfrac{1}{1-a}$

$\therefore\ y = \dfrac{2}{\sqrt{1-a}}x - \dfrac{1}{1-a}$

$\ell_2 : y = 2a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\right)+\dfrac{1}{1-a}$

$\therefore\ y = \dfrac{2a}{\sqrt{1-a}}x + \dfrac{1-2a}{1-a}$



$\therefore\ S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}\cdot\left(\dfrac{1-2a}{1-a}+\dfrac{1}{1-a}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

$S_2 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-a}}} ax^2+1-x^2\,dx = 2\left[\dfrac{a-1}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1-a}}} = \dfrac{4}{3\sqrt{1-a}}$

$\underline{\therefore\ \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{4}{3}}$ //