

2010年第3問

3 座標平面上で、行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で表される移動を  $f$  とする。0でないすべての実数  $t$  に対して、点  $P\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$  が  $f$  により曲線  $x^2 - y^2 = 4$  上に移るとき、次の問に答えよ。

(1)  $a, b, c, d$  は、

$$(a+b)^2 = (c+d)^2, \quad (a-b)^2 = (c-d)^2, \quad (a^2 - c^2) + (d^2 - b^2) = 2$$

を満たすことを示せ。

(2)  $a, b, c, d$  は、

$$a^2 - c^2 = d^2 - b^2 = 1, \quad ab = cd$$

を満たすことを示せ。

(3)  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とするとき、

$$X^2 - Y^2 = x^2 - y^2$$

となることを示せ。

(4) 点  $Q$  が直線  $y = x$  上にあるとき、 $f(Q)$  は直線  $y = x$  または直線  $y = -x$  上にあることを示せ。