三重大学

2015 年 教育・生物資源 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 正の実数 a に対し，$y = a\log x$ $(x > 0)$ により定まる曲線を C とする．C 上の点 $(2,\ a\log 2)$ における接線を ℓ とするとき，ℓ と x 軸とのなす角が 30° であった．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 接線 ℓ の方程式，および ℓ と x 軸との交点を求めよ．

(3) ℓ と C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{a}{x}$ より．ℓ の傾きは．$\dfrac{a}{2}$ これが $\tan 30^\circ$ に等しいから．

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(2) $\ell : y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2) + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\log 2$ $\qquad \therefore\ \ell : y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1-\log 2)$

$y=0$ を代入すると．$x = 2(1-\log 2)$ $\quad \therefore$ x 軸との交点は $(2-2\log 2,\ 0)$

(3)

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\log 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\log 2}_{\text{直角三角形}} - \int_1^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}\log x\,dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\log 2)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_1^2 (x)'\log x\,dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\log 2)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[x\log x\Big]_1^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_1^2 dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\log 2)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 2\log 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{(\log 2)^2 - 2\log 2 + 1\right\}$$