東京都市大学

2014年 工（電気電子工，建築） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nを自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 任意のnに対し，不等式$n! \geqq 2^{n-1}$が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(2) $n \geqq 4$のとき，不等式

$$1.7 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$$

が成り立つことを示せ．

(1) 数学的帰納法により証明する

(i) $n=1$のとき，

$1! = 2^0$ より，成り立つ

(ii) $n=k$のとき，成り立つと仮定する

$k! \geqq 2^{k-1} \cdots ①$

①の両辺に$(k+1)$をかけて，

$(k+1)! \geqq (k+1)\cdot 2^{k-1} \cdots ②$

kは自然数であるから，$k+1 \geqq 2$

$\therefore (k+1)\cdot 2^{k-1} \geqq 2\cdot 2^{k-1}$

$= 2^{(k+1)-1} \cdots ③$

②，③より，$(k+1)! \geqq 2^{(k+1)-1}$

$\therefore n=k+1$のとき，成り立つ

(i)，(ii)より，任意の自然数nに対して，

$n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つ ▨

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \geqq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ （$\because n \geqq 4$より）

$= \dfrac{41}{24}$ $(= 1.70833\cdots)$

> 1.7

(1)より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}}$ 無限等比級数の和，初項1，公比$\frac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= 2$

以上より，$1.7 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$ $(n \geqq 4)$ が成り立つ ▨