0001862907318999

2014年 第3問

数理 石井K

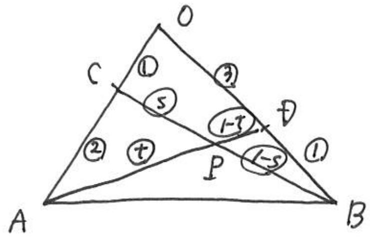
$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をC，辺OBを3：1に内分する点をD，ADとBCの交点をPとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) AP：PD $= t : 1-t$ $(0<t<1)$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 直線OPと辺ABとの交点をEとするとき，AE：EBを求めよ．

(4) $\angle AOB = 90^\circ$，$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$ であるとき，OA：OB：ABを求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + \frac{3t}{4}\vec{b}$ //

(2) (1)と同様に CP：PB $= s : 1-s$ $(0<s<1)$ とおくと．

$\overrightarrow{OP} = (1-s)\cdot\frac{1}{3}\vec{a} + s\vec{b} = \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b}$

(1)と，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が一次独立であることから $\begin{cases} 1-t = \frac{1-s}{3} \\ \frac{3}{4}t = s \end{cases}$

$\therefore\ t = \frac{8}{9}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ //

(3) $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OP}$ とかけるから $\overrightarrow{OE} = \frac{k}{9}\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}$

EがAB上の点であることから $\frac{k}{9} + \frac{2k}{3} = 1$ $\therefore\ k = \frac{9}{7}$

$\therefore\ \overrightarrow{OE} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{6}{7}\vec{b}$ $\therefore$ AE：EB $= 6:1$ //

(4) $\angle AOB = 90^\circ \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ より．

$\left(\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore\ |\vec{a}| = \sqrt{6}|\vec{b}|$

また，$(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 = 7|\vec{b}|^2$ $\therefore\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}|\vec{b}|$

$\therefore$ OA：OB：AB $= \sqrt{6} : 1 : \sqrt{7}$ //